

ACTA ECONOMICA (Online), год. 9, бр. 15 / јул 2011.  
УДК 005.52:65.01]:336.71, e-ISSN 2232-738X

## ПРЕГЛЕДНИ ЧЛАНАК

---

*Сањин Богдан\**

### **ПРОЦЈЕНА КРЕДИТНЕ СПОСОБНОСТИ (КРЕДИТНОГ РЕЈТИНГА) И КРЕДИТНОГ РИЗИКА ПОТЕНЦИЈАЛНИХ ТРАЖИОЦА КРЕДИТА - ПРЕДУЗЕЋА ИЗ РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ, КОРИШТЕЊЕМ ЛИНЕАРНЕ ДИСКРИМИНАТОРНЕ ФУНКЦИЈЕ**

### **ASSESSMENT OF THE CREDITWORTHINESS (CREDIT RATING) AND CREDIT RISK OF THE POTENTIAL LOAN APPLICANTS – COMPANIES IN THE REPUBLIC OF SRPSKA, USING LINEAR DISCRIMINATORY FUNCTIONS**

#### **Резиме**

Један од научно доказаних ефикасних метода за управљање кредитним ризиком је кредитно рангирање клијента на основу његовог бонитета. Кориштени модел у овом раду за кредитно рангирање клијената банке, базиран је на Фишеровој линеарној дискриминааторној анализи (ФЛДА), првенствено због своје робусности и једноставности примјене. Као рејтинг алат предложена ФЛДА може омогућити брзо рангирање клијента на бази одговарајућих парова улазних варијабли и са релативно високом сигурношћу генерисати јасну разлику између „добрих“ и „лоших“ клијената.

---

\* Агенција за Банкарство Републике Српске, [sanjin.bogdan@hotmail.com](mailto:sanjin.bogdan@hotmail.com)

Ставови представљени у овом раду су ставови аутора и не морају директно представљати политику и ставове Агенције за Банкарство Републике Српске.

Рад се заснива на подацима из извјештаја о финансијским резултатима пословања предузећа из Републике Српске за 2009. годину, достављеним Агенцији за посредничке, информатичке и финансијске услуге (АПИФ РС). Као контролни фактор коришћени су подаци о историји сервисирања њихових кредитних обавеза према комерцијалним банкама, садржаним у извјештајима Централног регистра кредита правних субјеката и физичких лица БиХ (ЦРК БиХ). Добијени резултати упућују на закључак да парови индикатора: 1. поврат на активу (ROA) и поврат на капитал (ROE); 2. укупан приход у 000 КМ и кредитна способност; и 3. кредитна способност и ликвидност имају тачност предвиђања изнад 80%, што статистички представља значајну вјероватноћу и као такви могу се употријебити за кредитну класификацију будућих клијената банке.

**Кључне ријечи:** кредитни ризик, кредитно рангирање, дискриминаторна функција.

## Summary

One of the scientifically proven and effective methods for managing credit risk is a credit rating system based on client's solvency. The model for the credit rating of bank customers presented in this paper is based on Fisher linear discriminatory analysis (FLDA), primarily due to its robustness and ease of use. As a rating tool proposed FLDA can advance the process of customer screening and rating based on the corresponding pairs of input variables where the relatively high security generate a clear distinction between "good" and "bad" customers. The paper is based on 2009 year end data from reports of financial results of companies from the Republic of Srpska, submitted to the Agency for mediation, information and financial services (APIF RS). As a control factor data on the history of servicing loan obligations to commercial banks (for the same companies), contained in the reports of the Central credit registry of legal entities and natural persons of BiH (BiH CRK) was used. The results suggests that pairs of indicators: 1 return on assets (ROA) and return on equity (ROE); 2 total income of 000 KM and cre-

ditworthiness, and 3 credit rating and liquidity have accurate predictions over 80%, which is statistically significant probability, and as such can be used for credit classification of future bank clients.

■ **Key words:** credit risk, credit rating, discriminatory function

## Увод

Изложеност ризику је један од основних елемената банкарског пословања, док је сама парадигма ризика у банкарству најбоље објашњена народном изреком „без ризика нема профита“, односно ако би банка била у потпуности заштићена од ризика, самим тим не би могла бити профитабилна.

Однос банке према ризику није потпуна аверзија према излагању ризику, већ представља активно управљање и процјену који је то степен излагања ризику који банка може прихватити а да истовремено буде солвентна, ликвидна и профитабилна.

Банка има потребу да процијени ризике којима је изложена, а тиме и износе потенцијалних губитака и могућег профита, а да истовремено остане унутар ограничења наметнутих од стране регулатора, с једне стране, и очекивања акционара банке, с друге стране.

Да би се обезбиједио тај деликатан баланс, банкама су потребни механизми којима се омогућује праћење ризичних позиција и стварају иницијативе за пруденцијално преузимање ризика од стране свих учесника унутар банке. Кроз процес активног управљања ризиком банка врши идентификације најзначајнијих ризика, те утврђује конзистентне оперативне мјере, које омогућавају избор изложености у које треба инвестирати, односно изложености које треба повећати, или оне које треба редукovati, дефинишући прецизно износе и временске периоде. Генерално, поуздан систем процјене и управљања ризиком омогућава да се капитал усмјери ка оним активностима и пласманима који имају најбољи однос ризика и потенцијалног профита унутар законских ограничења.

У свом пословању банка је изложена већем броју ризика, од којих су најзначајнији: кредитни, тржишни, оперативни и ризик ли-

квидности<sup>1</sup>. Од свих наведених ризика, кредитни ризик, упркос константним иновацијама у подручју финансијских услуга, представља највећи узрок банкрота банака у свијету<sup>2</sup>. У Босни и Херцеговини овај ризик је још битнији због оријентисаности на традиционално банкарство<sup>3</sup>, што генерално подразумеује већу усмјереност на депозитно-кредитно пословање комерцијалних банака.

Квалитетно управљање кредитним ризиком, што је предмет разматрања у овом раду, може се сажети у два основна фактора заштите, од којих први мора дати и јасан одговор: којем клијенту треба одобрити кредит, а којем не. Други фактор се односи на континуиран мониторинг промјене бонитета постојећег клијента<sup>4</sup>.

Оба наведена фактора се заснивају на тренутној процјени бонитета клијента, односно у процјени да ли ће клијент бити у стању да извршава уговорене обавезе у задатом временском периоду.

## 1. Кредитни ризик

На основу претходно наведеног поставља се питање: Шта је јасна и прецизна дефиниција кредитног ризика?

У литератури, по општеприхваћеном схватању, кредитни ризик се дефинише као вјероватноћа да банка неће бити у стању да наплати своја укупна потраживања од клијента - како по основу главнице, тако и по основу припадајућих камата<sup>5</sup>. Међутим, ова дефиниција се односи на случајеве који су у својој основи производ по-

<sup>1</sup> Поред наведених, ту су стратешки ризик, репутациони, системски ризик, ризик земље и др.

<sup>2</sup> Греунинг, Н.; Брајовић-Братановић, С. *Анализа и управљање банкарским ризицима: приступ за процјену организације управљања ризицима и изложености финансијском ризику*. 2. изд. Загреб: Мате, стр. 135.

<sup>3</sup> У БиХ (РС и ФБиХ) 62% укупне билансне активе банака односи се на кредитне пласмане, док на улоге на тржишту хартија свега 0,8% укупне билансне активе. Извор: Прелиминарни подаци 31.12.2009.године, Агенција за банкарство РС и Агенција за банкарство ФБиХ.

<sup>4</sup> Нпр: клијент је у периоду  $t$  добио кредит на основу постојећег стања у том периоду, што не гарантује да у периоду  $t+1$  неће имати проблема у сервисирању преузетих обавеза.

<sup>5</sup> Colquitt, J. *Credit risk management*. McGraw-Hill, 2007, p.1.

стојања кредитног ризика, а то је да усљед пада бонитета клијента<sup>6</sup>, када клијент неће бити у стању да извршава своје кредитне обавезе у заданом року, што ће имати за посљедицу да банка дјелимично или у потпуности неће добити назад своја пласирана средства и обрачунату камату.

Да би елаборирали суштину кредитног ризика, потребно је горе наведену дефиницију проширити са елементима који дефинишу кредитни ризик као могућност непредвиђене промјене у бонитету друге уговорне стране, а која може генерисати одговарајућу неплаћану промјену у тржишној вриједности, повезану са кредитном изложеношћу.<sup>7</sup>

По Сиронију и Рестију, кредитни ризик није уско лимитиран на вјероватноћу да кредитирана страна не изврши своје обавезе, већ и само снижење у бонитету клијента представља кредитни ризик за банку. Логика овог става лежи у чињеници да смањење бонитета клијента доводи до смањења тренутне тржишне вриједности пласмана, која је одређена садашњом вриједности будућег тока новца. Садашња вриједност се одређује кориштењем дисконтне стопе, односно стопе слободне од ризика за то одговарајуће доспијеће, на коју се додаје распон<sup>8</sup>, односно премијум ризика који рефлектује вјероватноћу неиспуњења обавеза од стране клијента.

Опадањем бонитета клијента повећава се вјероватноћа неиспуњења обавеза, те аутоматски ствара повећање у премијуму ризика, што се рефлектује смањењем садашње вриједности будућег тока новца. Генерално посматрано, што је већа варијација у премијуму ризика и дужи рок отплате кредита, веће је и смањење данашње вриједности пласмана усљед погоршања бонитета, односно рејтинга клијента.

Поједностављено говорећи: у случајевима када банка жели продати одређени кредитни пласман другој банци, продајна цијена ће

---

<sup>6</sup> Не извршавање уговорених обавеза такође може бити узроковано намјерним кршењем обавеза од стране клијента, односно проневијером.

<sup>7</sup> Sironi, A.; Resti, A. *Risk management and shareholders' value in banking : from risk measurement models to capital allocation policies*. John Wiley & Sons Ltd, 2007, p. 277.

<sup>8</sup> Eng. Spread.

кореспондирати са садашњом вриједности будућег тока новца везаног за тај кредитни пласман (укључујући само временски распон ризика, односно временски премијум ризика) уколико се ради о квалитетном клијенту. Међутим, у случају кад долази до пада квалитета клијента, долази до значајног раста вјероватноће да у краћем временском периоду, клијент неће бити у могућности да сервисира своје обавезе, те самим тим ће доћи до дјелимичног или потпуног губитка тог пласмана за банку. Стога, када се покуша продаја таквог кредитног пласмана, банка неће моћи остварити продајну цијену која кореспондира са вриједношћу будућег тока новца, увећаног само за премијум временског ризика, већ ће вриједност морати умањити за додатни премијум ризика.

У складу са наведеним дефиницијама и интерпретацијама аутора, може закључити и да је кредитни ризик сачињен од два фактора: ризика од неиспуњења обавеза и ризика миграције, односно погоршања бонитета.

Сада, када смо у потпуности дефинисали кредитни ризик, долазимо до још једне занимљиве чињенице везане уз њега, а то је: да би се нешто дефинисало као ризик, варијација у бонитету клијента,<sup>9</sup> у посматраном периоду, мора бити неочекивана.

Прије пласирања кредита, банка мора процијенити бонитет клијента и одредити његов интерни рејтинг.<sup>10</sup> Ако се оцијени да би клијент у будућим периодима могао имати проблеме са аспекта профитабилности, солвентности или ликвидности, који ће имати за посљедицу неуредности у извршавању обавеза и евентуални пад будуће тржишне вриједности пласмана, банке ће те чињенице еволуирати и инкорпорирати у процес одобравања кредита, јер се оне рефлектују на одлуку о пласману и цијени кредита. Клијенту, за којег банка оцијени да његов бонитет није у складу са интерним нивоима прихватљивости, банка неће одобрити кредит, или ће цијена пласираних средстава кореспондирати његовој ризичној групи,

---

<sup>9</sup> У случају кредитног ризика, варијација која доводи до немогућности дјелимичне или потпуне наплате потраживања или доводи до пада тржишне вриједности пласмана и кореспондирајућег тока новца.

<sup>10</sup> У случајевима кад клијент нема екстерни рејтинг типа Moodys, Fitch итд.

због чега ће банка одлучити да узме додатно обезбјеђење у виду додатног колатерала (хипотеке). У истом случају виша цијена пласираних средстава, тј. камате се усклађује са ризичном групом клијента, која је увијек виша него код добрих клијената. Наведена пракса омогућава да банка оствари бржи прилив новца у краћем временском року и тако наплати исти износ камате који би имала од квалитетног неризичног клијента у дужем временском периоду<sup>11</sup>. Додатни колатерал овдје осигурава наплату главнице и дијела доспјеле ненаплаћене камате. На овај начин банка неутралише ризик, односно очекивани ризик је интегрисан, односно он је минимизиран.

Стварну опасност у кредитном пословању банака представља вјероватноћа да погоршање бонитета није предвиђено од стране банке и стога је прави ризик непредвиђен, а тим и неочекиван. Наравно и временски рок отплате утиче на постојање ризика: временски рок отплате пласмана је дужи, а тиме је и вјероватноћа непредвиђених варијација у бонитету клијента већа. Да би имали константу са којом можемо одредити фреквенцију варијације у бонитету клијента, опште је прихваћена пракса да се узима период од годину дана, са израчунатом вјероватноћом неизвршења обавеза<sup>12</sup>.

## 2. Врсте кредитног ризика

Класификација кредитног ризика се врши на основу фактора који директно утичу на настанак ризика: вјероватноће неизвршења

---

<sup>11</sup> Општа пракса у банкарству је да приликом отплате кредита по ануитетном плану клијент прво отплаћује камату, а потом главницу, такође банке пласирају кредит из једне групе депозита („pool-a“ депозита), или кредитне линије прије пласирања средства одреде каматну политику, тј. цијену по којој ће пласирати средства према неризичним клијентима. За ове клијенте банка на ову нормалну цијену обрачунава додатни цијеновни премијум, који омогућава да се оствари планирани приход по пласманима. Одређивање цијеновног премијума захтјева развијање интерног модела процјене да не дође непланиране деградације у бонитету клијента у периоду од једне године, што се у литератури назива вјероватноћа неизвршења обавеза (енг. *Probability of default* - PD). Ако израчуната PD вриједност за клијента није у складу са интерним минимумом банке, таквом клијенту неће се одобрити кредит.

<sup>12</sup> Период од годину дана у којем се посматра вјероватноћа неизвршења обавеза је стандард прописан Базел 2 споразумом за управљање кредитним ризиком.

обавеза, пада у кредитном рејтингу клијента, могућност наплате пласмана и на врсте кредитног производа. Основне групе ризика су:

- Ризик неизвршења обавеза, јесте ризик од неизвршавања уговорених обавеза од стране друге уговорне стране и доводи до губитка и камате и/или главнице пласмана. На примјер, клијент прогласи банкрот, иде у процес ликвидације или на други начин не извршава обавезе по кредиту.
- Миграциони ризик је везан за детериторизацију кредитног рејтинга клијента, а познат је и као ризик смањења рејтинга у случајевима када је клијенту одређен рејтинг од неке агенције/куће за рангирање, а усљед одређених тешкоћа дође до пада његовог рејтинга, што директно утиче на пад тржишне вриједности тог пласмана.
- Ризик разлике (енг. spread) је везан за повећање разлике потребне од стране клијента (издавача обвезница) на тржишту, који се може десити усљед раста „риск аверзије“ инвеститора према комитенту. Разлика је везана за раст вјероватноће неизвршења обавеза (пада ранга клијента). У наведеним условима тржишна вриједност хартија од вриједности може да се смањи, а да ранг клијента остане исти код агенције за рангирање, а произлази из перцепције инвеститора о стању клијента.
- Ризик поврата везан је за ризик да висина поврата пласмана после ликвидације несолвентног клијента буде мања од износа који је првобитно предвиђен јер је вриједност код ликвидације била нижа од предвиђене, или због тога што је процес ликвидације дужи трајао од планираног.<sup>13</sup>
- Ризик супституције представља ризик да уговорна страна која заступа банку на ОТС тржишту деривата постане несолвентна прије доспијећа деривата, што би натјерало банку да замијени тај дериват за други по новим вриједностима на тржишту, а које могу бити неповољне за банку.

<sup>13</sup> Због наведеног пракса је да банке као колатерал обично узимају више од 50% вриједности пласираних средстава.



- Ризик земље се јавља када уговорна страна нема статус резидента и није у стању да изврши уговорене обавезе због политичке или правне ситуације у његовој земљи, на примјер иницирање баријера на „foreign exchange market“ (fx тржиште) што може онемогућити извршавање уговорених обавеза.

### 3. Циљ и резултат рада

Циљ овог рада је да се одреди најбољи скуп финансијских индикатора<sup>14</sup> који ће омогућити даваоцима кредита квалитетну процјену рејтинга клијента, у сврху процјене кредитног ризика за изабрани узорак правних лица из Републике Српске, са аспекта могућности сервисирања обавеза према комерцијалним банкама и деградације бонитета клијента. Анализа се заснива на поређењу раније дефинисаних индикатора, користећи линеарну дискриминаторну функцију у одређивању скупа индикатора који имају „највећу“ дискриминаторну моћ подјеле на квалитетне и неквалитетне клијенте, те одређивању „зона“ рангирања за обје категорије. Предмет анализе је 41. правно лице/компанија из Републике Српске, тј. њихови финансијски извјештаји за 2009. годину достављени Агенцији за посредничке информатичке и финансијске услуге Републике Српске (АПИФ). Као контролни фактор кориштени су стварни подаци о „квалитету“ односно ризику посматраних клијента, тј. њихове историје сервисирања кредитних обавеза према комерцијалним банкама преузети из извјештаја Централног регистра кредита правних субјеката и физичких лица БиХ (ЦРК БиХ).

На основну добијених комбинација индикатора, извршена је селекција на добре и лоше компаније. Резултат рада указује на могућност израде једноставног модела за рангирање клијената, базираног на финансијским индикаторима пословања.

---

<sup>14</sup> Из скупа кориштених индикатора.

#### 4. Узорак и селекција дискриминаторних варијабли

На основу финансијских показатеља о резултатима пословања 41. компаније из Републике Српске у 2009. години, извршена је по-дјела на (20) добрих компанија и (21) лошу компанију и то искључиво са аспекта редовности сервисирања обавеза према подацима ЦРК БиХ на дан 31.12.2009. године. Компаније су класификоване у пет категорија (А, Б, Ц, Д, и Е). У складу са Одлуком о минималним стандардима за управљање кредитним ризиком и класификацију активе банака Републике Српске<sup>15</sup>, а на основу података из извјештаја ЦРК-а БиХ, за добре компаније су узете оне које су класификоване у А и Б, а за лоше класификоване у Ц, Д и Е категорију. У одабраном узорку извршена је селекција компанија и према секторима: 40% компанија су из производног сектора, 37% из трговине, 8% грађевинарства и 15% из осталих сектора<sup>16</sup>

У пракси идентификација индикатора, који се користити за потребе оваквих модела, веома је деликатан и захтјеван посао. По Рестију и Сиронију, генерално приликом селекција дискриминаторних варијабли можемо пратити двије основне процедуре: симултани, односно директни метод или метод „корак по корак“. У првом случају, код директног метода, модел је конструисан на *a priori* основи, што значи да су варијабле одабране на основу теоретског знања, а одговарајући дискриминаторни коефицијенти методом компарације. У другом случају, варијабле су одабране из широке листе кандидата, на основу дискриминаторног капацитета које имају на узорак. Ово се може постићи тако да у првом кораку укључимо све варијабле у анализу, а накнадно одбацимо оне за које се покаже да имају мањи дискриминирајући фактор (тзв. метод уназадне елиминације), или да идемо обрнутим смјером: да у анализу прво укључимо једну

<sup>15</sup> Сходно Одлуци Агенције за банкарство Републике Српске, квалитетна актива представља активу класификовану у А и Б категорију представља клијенте који у отплати својих обавеза максимално касне до 30 дана. Лоша актива представља Д, Ц и Е категорије гдје кашњење по кредитном пласману прелази 90 дана, односно 180 дана.

<sup>16</sup> Транспортне и грађевинске компаније, угоститељство, агенције за заштиту људи и објеката, пројектне и друге организације.

варијаблу, па накнадно додајемо оне са највећим дискриминаторним фактором, тј. оне које највише унапређују дискриминаторну способност модела, што представља напредну селекцију.

Такође, у пракси постоји и хибридна процедура селекције која се заснива на комбинацији горе наведена два метода, при чему се варијабле које се уврштавају на основу теоретског знања елиминишу из система на основу њихове узајамне интеракције, односно варијабле са већим дискриминаторним фактором замјењују оне са слабијим.

За потребе овог рада кориштен је директни метод одабира варијабли. Узете су слиједеће варијабле: поврат на активу, поврат на капитал, текућа ликвидност, величина фирме са аспекта прихода, коефицијент самофинансирања, коефицијент задужености и кредитна способност посматраног субјекта.

Да би се могао посматрати однос двије варијабле и њихова дискриминаторна моћ у односу на друге парове варијабли, варијабле су сортиране у парове у седам (7) различитих варијација. Резултат рада омогућује да се на основу најбољих парова дефинише једноставни модел који има највећу фреквенцију разлике између „добрих“ и „лоших“ компанија.

Посматрани парови варијабли (варијанте 1- 7) су:

1. ликвидност и коефицијент задужености,
2. коефицијент задужености и кредитна способност,
3. ROA i ROE,
4. приход у 000KM и кредитна способност,
5. приход у 000KM и коефицијент задужености,
6. кредитна способност и ликвидност и
7. ликвидност и коефицијент самофинансирања.

## 5. Линеарна дискриминациона анализа

У сврху класификације пословних субјеката (компанија) на „добре“ и „лоше“ потребно је, након одабира варијабли, утврдити које су варијабле независне, а које зависне. У посматраном примјеру компанија из Републике Српске, њихови финансијски индикатори

представљају независне варијабле, док њихова класификација по ЦРК-у на „добре“ и „лоше“, зависне варијабле.

Класификација објеката (компанија, производа, и др.) која се заснива на тестирању одређених хипотеза на бази минимизације вјероватноће грешке или цијене одлучивања је најбољи могући класификатор. Међутим, овакав метод класификације захтијева егзактно познавање условних функција густине вјероватноће. Најчешће проблеми се јављају зато што функције густине вјероватноће нису познате, већ се углавном располаже параметрима, на основу којих треба пројектовати класификатор. Један од начина на који се ово може превазићи јесте да се на основу низа параметара процијене условне функције густине вјероватноће, али овај поступак подразумева велики број података и везан је са многобројним нумеричким проблемима. Због тога се, врло често, примјењују методе класификације које су једноставне, али дају прихватљиве резултате, од којих су најпознатије линеарне и квадратне класификације<sup>17</sup>.

Линеарна дискриминациона анализа (ЛДА) је метод који се користи у статистици за проналажење линеарне комбинације особина које најбоље раздвајају двије или више класа објеката или догађаја и она спада у групу веома једноставнијих класификационих метода<sup>18</sup>. Блиска је техникама као што су корелациона класификација или класификација дистанце. Међутим, ове технике су оптималне само у случају нормалне расподеле функције вјероватноће са једнаким коваријационим матрицама. Премда је ово чест случај у пракси, ипак у великом броју случајева ради се о негаусовским расподелама са неједнаким коваријационим матрицама, а линеарни класификатор се и даље користи, првенствено због своје једноставности. Још једна битна особина која посебно истиче линеарну класификацију јесте њена робусност (отпорност аналитичког поступка на мале намјерне промјене параметара). Ова особина значи да је линеарна класификација врло неосетљива на промјене у статистичким ка-

<sup>17</sup> Bluhm, C.; Overbeck, L.; Wagner, C. *Intruductionto credit risk modeling*. Chapman & Hall CRC financial matematics series, 2003, pp. 29.

<sup>18</sup> Thomas L.; Edelman, D; Crock, J. *Credit scoring and application*. Siam monographs on mathematical modeling, 2002, pp. 42.

рактеристикама облика који се класификују. С обзиром да линеарна класификација не захтијева познавање условних функција густине вјероватноће, може се написати (испројектовати) у облику:

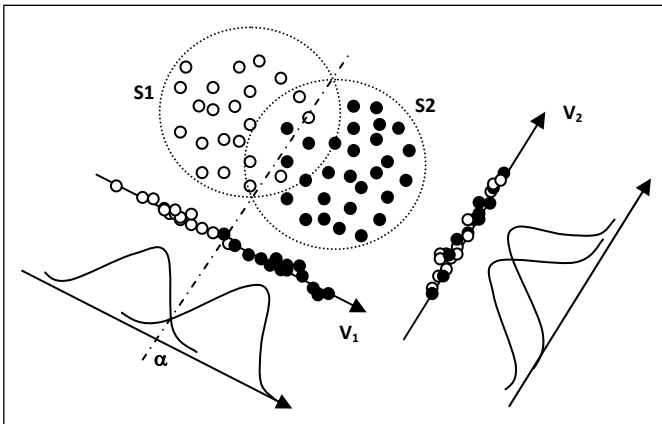
$$\begin{aligned} Z(X) &= V' \quad X < \alpha \quad \text{за } X \in S_1 \\ Z(X) &= V' \quad X > \alpha \quad \text{за } X \in S_2 \end{aligned} \quad (1)$$

Скалар  $Z(X)$  се назива линеарном дискриминаторном функцијом. Главни задатак је одредити линеарни класификатор, односно вектор  $V$  ( $V'$  означава транспоновани вектор  $V$  у једначини (1) тако да се оптимизира неки погодан критериј. Једначина (1) значи да се врши пројекција вектора  $X$  на вектор  $V$ . Скаларни производ  $Z(X)$  из једначине (1) се пореди са величином „ $\alpha$ “ (граница или репер) на основу чега се доноси одлука да ли варијабла  $X$  припада скупу (класи, групи)  $S_1$  или  $S_2$ .

На слици 1. је приказан примјер пројектовања на два таква вектора  $V_1$  и  $V_2$ . Са слике је видљиво да је пројекцијом на вектор  $V_1$  далеко лакше (ефикасније) извршити класификацију варијабле  $X$  него пројекцијом на вектор  $V_2$ .

За даљња разматрања проблема у вези са класификацијом предузећа на „добра“ и „лоша“, односно идентификацију проблематичних предузећа по питању ризика поврата банкарског кредита, предлаже се употреба тзв. Фишерове линеарне дискриминационе анализе.

Слика 1: Графички приказ класификације објеката у двије класе



Фишера<sup>19</sup> линеарна дискриминациона анализа (ФЛДА) је широко употребљавана техника за класификацију узорака. Проблем класификације се своди на проналажење линеарног дискриминанта који ће произвести оптималну разлику између двије класе, односно скупа елемената, и који се базира на максимизирању одступања дистанце између средњих вриједности за те двије класе<sup>20</sup>, у конкретном случају за групу „добрих“ и „лоших“ компанија.

На бази једначине (1), линеарна дискриминациона функција (ЛД функција) се може написати у облику:

$$Z = \sum_{j=1}^n \gamma_j * X_j \quad (2)$$

гдје су елементи вектора  $V$  означени са  $\gamma$  (гама) и у даљем тексту ће се вектор  $V$  означавати као  $\gamma$  вектор. У развијеном облику (2) је:

$$Z = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 + \dots + \gamma_n x_n \quad (3)$$

гдје је „ $n$ “ број број параметара који се мјере (посматрају), односно, број варијабли  $x$ . Написано у векторском облику (што је идентично једначини 1):

$$Z = \gamma' X \quad (4)$$

гдје је  $\gamma'$  транспоновани  $\gamma$  вектор и  $X$  вектор вриједности варијабли  $x$  ( $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ).

$$\gamma' = [\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \dots \gamma_n] \quad (5)$$

Скалар  $Z$  представља скаларну вриједност за једну класу предузећа, а варијабла  $x$  представља једну од посматраних карактеристика предузећа (у овом случају економске и финансијске показатеље успјешности пословања предузећа). Генерално узевши, за  $m$  преду-

<sup>19</sup> Ronald Aylmer Fisher (1890-1962), енглески научник из области статистике и биологије.

<sup>20</sup> Fisher, R. The Use of Multiple Measurements in Taxonomic Problems// *Annals of Eugenics*, 1936, pp. 179—188.

зећа се може написати да постоји  $m$  линеарних дискриминационих функција (линерних класификатора).

$$Z_i = \sum_{j=1}^n \gamma_j * X_{i,j}; \quad i=1 \text{ до } m \quad (6)$$

За случај двије класе предузећа (компанија) „добрих“ и „лоших“ имамо двије средње вриједности линеарних класификатора (центроида):

- „ $Z_a$ “ за групу „добрих“ предузећа и (7)
- „ $Z_b$ “ за групу „лоших“ предузећа.

Коефицијенти  $\gamma_j$  линеарне комбинације (6) су одабрани тако да се добије резултат  $Z$  који дискриминира, тј. прави разлику колико год је то могуће, између добрих, квалитетних, стабилних предузећа и неквалитетних, несолвентних, лоших предузећа. Другим ријечима: за класификовање предузећа у добра, вриједности  $Z_a$  требају имати што већу разлику од вриједности  $Z_b$  и обрнуто. Овај услов се може задовољити ако се вектор гама коефицијената израчуна на тај начин да максимизира стандардизирану (нормализовану) дистанцу између центроида, тако да је:

$$\underset{\gamma}{Max} \frac{|Z_a - Z_b|}{\sigma_z} \quad (8)$$

Да би се избјегао рад са апсолутним вриједностима (не добија се дифенцијабилна функција), уводи се максимизирање по  $\gamma$  квадрата горњег израза, тј.

$$\underset{\gamma}{Max} \frac{(z_a - z_b)^2}{\sigma_z^2} = q(\gamma) \quad (9)$$

гдје је нормализациони члан:

$$\sigma_z^2 = \gamma' \Sigma \gamma \quad (10)$$

а  $\Sigma$  је матрица варијансе и коваријансе између  $n$  независних варијабли. Диференцирањем једначине (9) по  $\gamma$  и изједначајући је са 0:

$$\frac{\partial q(\gamma)}{\partial \gamma} = 0 \quad (11)$$

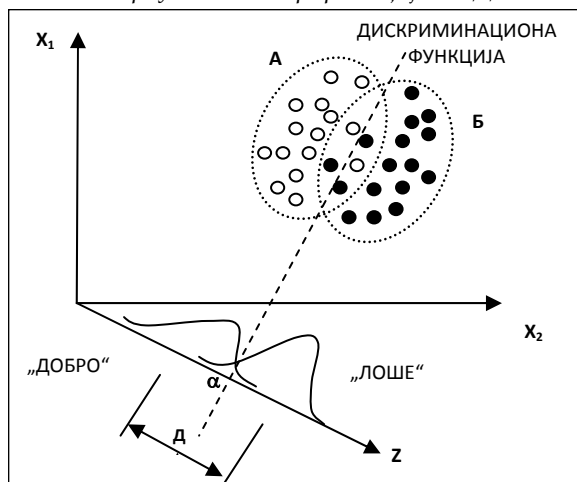
долази се до Фишеровог рјешења оптималних  $\gamma$  коефицијената који максимизирају дистанцу између центроида  $Z_a$  и  $Z_b$ :

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \Sigma^{-1} x_a - x_o \quad (12)$$

гдје су  $X_a$  и  $X_b$  вектори који имају средње вриједности  $n$  независних варијабли за групу „добрих“  $A$  и групу „лоших предузећа“  $B$ , а  $\Sigma^{-1}$  је инверзна матрица варијанси и коваријанси између независних варијабли (заједничка матрица варијанси и коваријанси за  $A$  и  $B$ ).

На слици 2. дат је Фишеров модел у поједностављеном облику, у којем је графички представљен скуп (класа) квалитетних (добрих, поузданих, здравих) предузећа  $A$ , и скуп несолвентних (лоших, непоузданих) предузећа  $B$ . Свако предузеће је представљено са двије варијабле  $x_1$  и  $x_2$ . Генерисани резултат се добија комбинацијом двије почетне варијабле  $x_1$  и  $x_2$  и представљен је на  $z$  оси.

Слика 2: Графичка интерпретација ФЛДА са двије варијабле  $x$



Фишеров модел се практично своди на добијање што веће вриједности дистанце  $D$  (сл. 2), а према једначини (11). Линеарна дис-



криминациона анализа (ЛДА) и Фишерава линеарна дискриминациона анализа (ФЛДА) су методе које се користе у статистици, код препознавања узорака и машинског учења за проналажење линеарне комбинације особина које карактеризирају или раздвајају двије или више класа објеката или догађаја. Резултујућа комбинација може бити употребљена као линеарни класификатор и за димензионалну редукцију прије каснијих поступака класификације. Током испитивања података, видимо да гранична тачка  $\alpha$  (сл.2) класификује све резултате (предузећа) као „добре“ ако се налазе лијево од ње, тј. ако је  $Z$  мање од  $\alpha$ , односно „лоше“ ако је  $Z$  веће од  $\alpha$  - сходно правилу (1). Према томе, ФЛДА је комбинација линеарно димензионално-редукционог поступка и поступка класификације који, поред економије, има широку примјену и у биометрици, биоинформатици, и др.

У овом раду, како је већ наведено, анализирано је 20 „добрих“ предузећа и 21 „лоше“ предузеће, и то на основу 10 параметара који дефинишу „квалитет“ предузећа тако што су у сваком тесту узета по два (2) различита параметра. На тај начин имамо да је:

$N_a=20$  број „добрих“ предузећа

$N_b=21$  број „лоших“ предузећа

Са  $X_{a1,i}$  означавамо промјенљиву  $X_1$ , а са  $X_{a2,i}$  промјенљиву  $X_2$  у групи добрих предузећа (А), гдје индекс „ $i$ “ има вриједности од 1 до 20 ( $N_a$ ). Слично је и са ознакама  $X_{b1,j}$  и  $X_{b2,j}$  (промјенљиве  $X_1$  и  $X_2$  у групи „лоших“ предузећа – Б), гдје индекс „ $j$ “ има вриједности од 1 до 21 ( $N_b$ ).

Центроиде (средње вриједности пројектованих скупова „добрих“ А и „лоших“ Б предузећа на  $Z$  осу), полазећи од једначина (6) и (7), су:

$$Z_a = \frac{\sum_{i=1}^{N_a} z_{a,i}}{N_a} = \frac{\sum_{i=1}^{N_a} (\gamma_1 x_{a1,i} + \gamma_2 x_{a2,i})}{N_a} \quad (13)$$

$$Z_b = \frac{\sum_{j=1}^{N_b} z_{b,j}}{N_b} = \frac{\sum_{j=1}^{N_b} (\gamma_1 x_{b1,j} + \gamma_2 x_{b2,j})}{N_b}$$

У складу са једначином (12) потребно је израчунати вектор  $\gamma$ . Да би се спријечила забуна у релативно компликованом прорачуну, матрица  $\Sigma$  (чију је ознаку лако замјенити са знаком „сигма“ за суму) замијењена је ознаком  $V_{a\bar{b}}$ , а вектори  $X_a$  и  $X_{\bar{b}}$  са ознакама  $M_a$  и  $M_{\bar{b}}$  (са значењем „mean“ тј. средња вриједност за скупове „добрих“, односно „лоших“ предузећа). Сада једначина (13) поприма облик:

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = V_{a\bar{b}}^{-1} (M_a - M_{\bar{b}}) \quad (14)$$

гдје су вектори  $M_a$  и  $M_{\bar{b}}$ :

$$M_a = \begin{bmatrix} M_{a1} \\ M_{a2} \end{bmatrix}; \quad M_{\bar{b}} = \begin{bmatrix} M_{\bar{b}1} \\ M_{\bar{b}2} \end{bmatrix} \quad (15)$$

односно:

$$M_{a1} = \frac{\sum_{i=1}^{N_a} x_{a1,i}}{N_a}; \quad M_{a2} = \frac{\sum_{i=1}^{N_a} x_{a2,i}}{N_a} \quad (16)$$

$$M_{\bar{b}1} = \frac{\sum_{j=1}^{N_{\bar{b}}} x_{\bar{b}1,j}}{N_{\bar{b}}}; \quad M_{\bar{b}2} = \frac{\sum_{j=1}^{N_{\bar{b}}} x_{\bar{b}2,j}}{N_{\bar{b}}}$$

Заједничка матрица варијанси и коваријанси  $V_{a\bar{b}}$  се рачуна по следећем обрасцу:

$$V_{a\bar{b}} = \frac{N_{\bar{b}} - 1}{N_a + N_{\bar{b}} - 2} V_a + \frac{N_a - 1}{N_a + N_{\bar{b}} - 2} V_{\bar{b}} \quad (17)$$

Једначина (17) укључује вриједности „ $N_a - 1$ “ и „ $N_{\bar{b}} - 1$ “ с обзиром да када се израчунава варијанса и коваријанса, добијени резултат уобичајено се дијели са бројем проматраних узорака минус један.  $V_a$  и  $V_{\bar{b}}$  представљају матрице варијанси и коваријанси за  $A$  и  $B$  предузећа, и према дефиницији су:

$$V_a = \begin{bmatrix} S_{a1} & C_{a12} \\ C_{a21} & S_{a2} \end{bmatrix}; \quad V_{\delta} = \begin{bmatrix} S_{\delta1} & C_{\delta12} \\ C_{\delta21} & S_{\delta2} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Са „ $S$ “ су означене варијансе и са „ $C$ “ коваријансе за  $A$  и  $B$  предузећа по питању промјенљивих  $X_1$  и  $X_2$  ( $S_{a1}$  је варијанса промјенљиве  $X_1$ , а  $S_{a2}$  промјенљиве  $X_2$  за „добра“ предузећа  $A$ , итд.).

$$S_{a1} = \frac{\sum_{i=1}^{Na} (x_{a1,i} - M_{a1})^2}{N_a}; \quad S_{a2} = \frac{\sum_{i=1}^{Na} (x_{a2,i} - M_{a2})^2}{N_a} \quad (19)$$

$$S_{\delta1} = \frac{\sum_{j=1}^{N_{\delta}} (x_{\delta1,j} - M_{\delta1})^2}{N_{\delta}}; \quad S_{\delta2} = \frac{\sum_{j=1}^{N_{\delta}} (x_{\delta2,j} - M_{\delta2})^2}{N_{\delta}}$$

$$C_{a12} = \frac{\sum_{i=1}^{N_a} (x_{a1,i} - M_{a1})(x_{a2,i} - M_{a2})}{N_a}; \quad C_{\delta12} = \frac{\sum_{j=1}^{N_{\delta}} (x_{\delta1,j} - M_{\delta1})(x_{\delta2,j} - M_{\delta2})}{N_{\delta}} \quad (20)$$

$$C_{a12} = C_{a21} \quad \text{и} \quad C_{\delta12} = C_{\delta21} \quad (21)$$

У општем облику матрица  $V_{ab}$  се може написати као:

$$V_{ab} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix} \quad (22)$$

На основу једначина (17) и (18) слиједи да је:

$$v_1 = \frac{N_a - 1}{N_a + N_{\delta} - 2} S_{a1} + \frac{N_{\delta} - 1}{N_a + N_{\delta} - 2} S_{\delta1}$$

$$v_2 = v_3 = \frac{N_a - 1}{N_a + N_{\delta} - 2} C_{a12} + \frac{N_{\delta} - 1}{N_a + N_{\delta} - 2} C_{\delta12} \quad (23)$$

$$v_4 = \frac{N_a - 1}{N_a + N_{\delta} - 2} S_{a2} + \frac{N_{\delta} - 1}{N_a + N_{\delta} - 2} S_{\delta2}$$

Инверзна матрица  $V_{ab}^{-1}$  се сада добија као:

$$V_{a\bar{b}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{v_4}{v_1v_4 - v_2v_3} & \frac{-v_2}{v_1v_4 - v_2v_3} \\ \frac{-v_3}{v_1v_4 - v_2v_3} & \frac{v_1}{v_1v_4 - v_2v_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \quad (24)$$

На бази једначина (14), (15) и (24) сада се добија:

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(M_{a1} - M_{a2}) + g_2(M_{\bar{b}1} - M_{\bar{b}2}) \\ g_3(M_{a1} - M_{a2}) + g_4(M_{\bar{b}1} - M_{\bar{b}2}) \end{bmatrix} \quad (25)$$

Гранична (дискриминациона) вриједност „cut-off point“, на основу које се врши класификација на „добра“ и „лоша“ предузећа (слика 2.) је:

$$\alpha = \frac{Z_a + Z_{\bar{b}}}{2} \quad (26)$$

Односно, на основу једначина (13) и (16) је и:

$$\alpha = \frac{\gamma_1}{2}(M_{a1} + M_{\bar{b}1}) + \frac{\gamma_2}{2}(M_{a2} + M_{\bar{b}2}) \quad (27)$$

## 6. Улазни подаци и резултати линеарне дискриминационе анализе (ЛДА)

У табели 1. и 2. су дати улазни подаци кориштени за модел дистрибуције узорка за „добра“ и „лоша“ предузећа (као што је наведено у поглављу 5.).

**Табела 1:** Финансијски индикатори пословања „ДОБРИХ“ предузећа у 2009. години

„i“	ROA	ROE	Ликвидност	Величина у 000КМ	Коеф. самофинансирања	Коеф. задужености	Кредитна способност
1	0,158533	0,481287827	0,909042795	723404	0,32939355	0,67060645	0,891520684
2	0,00049	0,00204127	0,776772987	7072	0,239925977	0,759357744	0,872296254
3	0,01077	0,07994787	1,032354045	479716	0,134712875	0,865287125	1,14610507
4	0,022355	0,054082505	2,850112461	270852	0,413357449	0,586642551	2,334865842
5	0,005446	0,00782595	1,571578446	265965	0,695839734	0,304160266	0,743732387
6	0,230446	0,69714274	0,583084991	3254606	0,330557547	0,654704386	0,591803194
7	0,000731	0,001800239	1,080793352	19900	0,406279567	0,593720433	0,746875717
8	0,001821	0,01673005	0,773019366	31608	0,10887104	0,89112896	0,10887104

Процјена кредитне способности (кредитног рејтинга)  
Сањин Богдан и кредитног ризика потенцијалних тражиоца кредита...

9	0,230336	0,415917858	2,239642302	1810871	0,553800463	0,446199537	0,797310034
10	0,002981	0,022599822	0,524489518	102960	0,131907664	0,868092336	0,653821903
11	0,209434	1,286097964	1,678482655	3039807	0,16284445	0,83715555	0,742527712
12	0,039839	0,051058162	1,480143536	965942	0,780265918	0,219734082	0,780265918
13	0,177424	0,824908959	0,617665315	7368298	0,21508365	0,773786837	0,409885869
14	0,002168	0,041107025	0,731476069	42483	0,052738046	0,947261954	0,505516998
15	0,008195	0,011827698	1,832443057	64989	0,692882608	0,307117392	0,758380701
16	0,015188	0,021290928	0,421667151	2567153	0,713351816	0,286371948	0,958641451
17	0,037597	0,071875305	1,215260183	784607	0,52308852	0,47691148	0,529043968
18	0,069765	0,994854032	0,747249157	1063298	0,070125926	0,929874074	0,072549106
19	0,011695	0,057408063	1,374389377	503846	0,203715074	0,796284926	0,509036958
20	0,067527	0,07865973	0,568597806	2818878	0,858464396	0,137307787	0,996913829

Табела 2: Финансијски резултати пословања „ЛОШИХ“ предузећа у 2009. години

„j“	ROA	ROE	Ликвидност	Величина у 000КМ	Коеф. самофинан- сирања	Коеф. задужености	Кредитна способност
1	-0,0789587	-0,007624869	1,590941266	-655749	0,00060205	1	1,880294942
2	-0,003629342	-0,005049878	1,032478094	-24049	0,718698906	0,281301094	1,003058398
3	-0,033800951	-0,478123085	0,523612266	-3236976	0,070695084	0,352443547	0,752871093
4	-0,222646828	-0,84520993	0,41256729	-1770883	0,263421927	0,736578073	0,5873501
5	0,000899221	0,003795592	0,562834583	7296	0,236912023	0,763087977	0,617051259
6	-0,067347618	-0,215639841	0,80318263	-1780478	0,312315283	0,687684717	0,861292229
7	-0,105820694	-1,428928814	0,558072127	-1974008	0,074055959	1	0,801162997
8	-0,048509287	-0,638381715	1,056857175	-1262306	0,075987902	0,924012098	1,123212882
9	-0,075799251	-1,654242959	1,185928911	-414325	0,045821112	0,954178888	1,145128049
10	0,002493583	0,01336461	1,436986714	19502	0,186581041	0,813418959	1,106854129
11	0,005692882	0,016235416	0,013712556	161729	0,350645896	1	1,258989677
12	0,005855868	0,283092491	1,46115591	84376	0,020685352	0,946001661	1,17714708
13	0,001796488	0,005490054	1,24896869	7305	0,32722593	0,67277407	1,075600272
14	-0,04080579	-4,3865	0,211606796	-43865	0,009302585	1	0,439538804
15	-0,078081244	-0,216342115	0,898315617	-2800365	0,3609156	0,432927292	0,604725668
16	-0,178754427	-0,542404044	0,753317269	-1171788	0,329559539	0,670440461	0,85945575
17	-0,056115272	-0,425485964	1,064024414	-1256940	0,13188513	0,86811487	1,101442182
18	-0,065875333	-0,085860907	0,439779378	-3346109	0,767233137	0,232766863	0,854728312
19	0,001653442	0,032126833	1,025104952	4683	0,051466066	0,948533934	1,312102993
20	0,019312189	0,118369363	0,637179084	674250	0,16315192	0,788155873	0,708142122
21	-0,01263826	-0,016697116	0,464470189	-1136546	0,756912759	0,239384052	0,857619867

Табела 3. представља израчунате<sup>21</sup> линеарних класификатора  $Z_{a,i}$  и  $Z_{b,j}$  за изабрани узорак „лоших“ и „добрих“ предузећа. Варијанте

<sup>21</sup> Прорачуни ЛД функције су урађени у програму MS Excell и рад су аутора.

од 1 до 7 представљају одабране парове, као што је наведено у поглављу 5. За потребе графичког приказа „Бр.“ у табелама 3. и 4. су индекси „i“ (од 1 до 20) и „j“ (од 1 до 21) представљени у „низу“ од 1 до 41 (20+21).

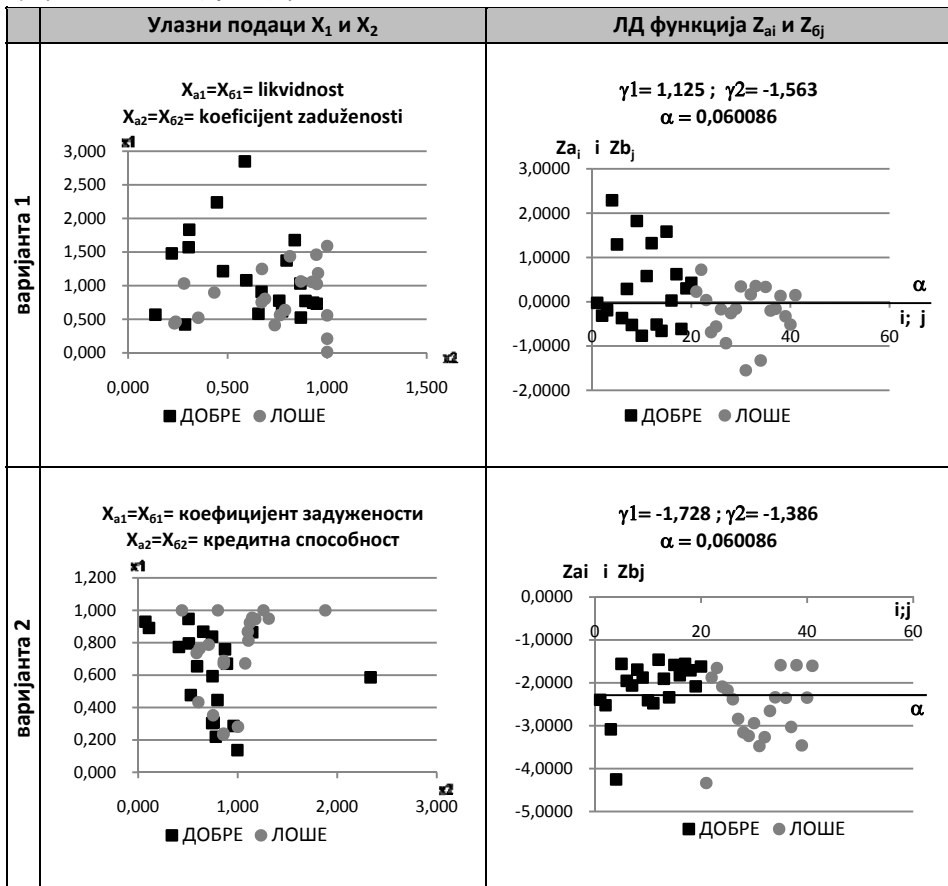
Табела 3:

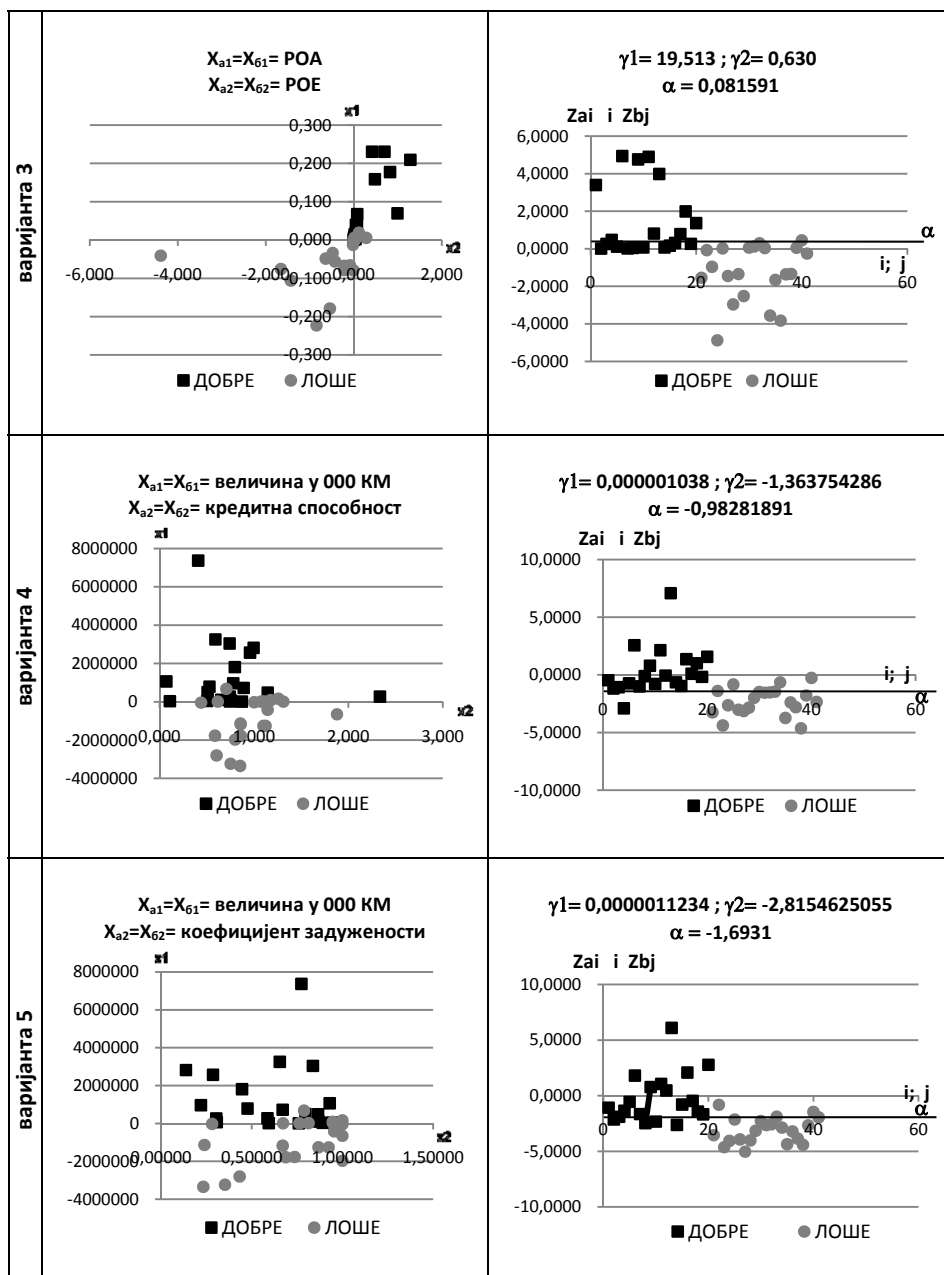
z	Бр.	Варијанта 1	Варијанта 2	Варијанта 3	Варијанта 4	Варијанта 5	Варијанта 6	Варијанта 7
z <sub>a</sub>	1.	-0,0255	-2,3945	3,3967	-0,4653	-1,0754	-0,7233	1,7345
	2.	-0,3130	-2,5212	0,0108	-1,1823	-2,1300	-1,0156	1,3938
	3.	-0,1910	-3,0837	0,2605	-1,0653	-1,8973	-1,3023	1,4605
	4.	2,2895	-4,2498	0,4703	-2,9032	-1,3474	-0,6115	4,1202
	5.	1,2926	-1,5564	0,1112	-0,7383	-0,5576	1,6192	3,2676
	6.	-0,3673	-1,9516	4,9359	2,5697	1,8129	-0,5357	1,3664
	7.	0,2879	-2,0611	0,0154	-0,9979	-1,6492	0,2665	2,0934
	8.	-0,5232	-1,6908	0,0461	-0,1157	-2,4734	1,7209	1,1106
	9.	1,8222	-1,8761	4,7566	0,7915	0,7781	3,2522	3,7250
	10.	-0,7668	-2,4063	0,0724	-0,7848	-2,3284	-0,9190	0,8770
	11.	0,5798	-2,4757	4,8969	2,1413	1,0579	1,9157	2,2550
	12.	1,3217	-1,4611	0,8095	-0,0619	0,4665	1,2378	3,3433
	13.	-0,5146	-1,9052	3,9818	7,0858	6,0990	0,2133	1,1600
	14.	-0,6577	-2,3375	0,0682	-0,6453	-2,6193	0,1803	0,9439
	15.	1,5815	-1,5818	0,1674	-0,9668	-0,7917	2,2794	3,5579
	16.	0,0268	-1,8235	0,3098	1,3561	2,0777	-2,2968	1,9974
	17.	0,6218	-1,5574	0,7789	0,0926	-0,4613	1,4178	2,4949
	18.	-0,6127	-1,7074	1,9881	1,0043	-1,4235	1,7812	0,9989
	19.	0,3016	-2,0815	0,2644	-0,1714	-1,6759	1,9247	1,9962
	20.	0,4251	-1,6190	1,3672	1,5651	2,7801	-2,0329	2,4733
z <sub>b</sub>	21.	0,2268	-4,3341	-1,5455	-3,2446	-3,5522	-2,4173	1,8102
	22.	0,7219	-1,8763	-0,0740	-1,3929	-0,8190	-0,7872	2,7033
	23.	0,0382	-1,6525	-0,9608	-4,3852	-4,6289	-1,2778	0,7458
	24.	-0,6871	-2,0869	-4,8770	-2,6383	-4,0633	-0,9857	1,0297
	25.	-0,5595	-2,1738	0,0199	-0,8339	-2,1402	-0,6819	1,1441
	26.	-0,1713	-2,3821	-1,4500	-3,0219	-3,9364	-0,9038	1,5778
	27.	-0,9352	-2,8384	-2,9651	-3,1407	-5,0332	-1,3574	0,7921
	28.	-0,2553	-3,1535	-1,3487	-2,8415	-4,0197	-1,1529	1,3633
	29.	-0,1572	-3,2360	-2,5212	-1,9915	-3,1519	-0,8790	1,4459
	30.	0,3452	-2,9397	0,0571	-1,4892	-2,2682	-0,0552	2,0309
	31.	-1,5476	-3,4730	0,1213	-1,5491	-2,6338	-4,4924	0,7618
	32.	0,1652	-3,2662	0,2926	-1,5178	-2,5686	-0,2420	1,7054
	33.	0,3535	-2,6533	0,0385	-1,4593	-1,8860	-0,4566	2,1164
	34.	-1,3249	-2,3372	-3,5597	-0,6449	-2,8647	-1,0031	0,2604
	35.	0,3339	-1,5862	-1,6599	-3,7302	-4,3650	0,2793	1,7894
	36.	-0,2004	-2,3497	-3,8297	-2,3878	-3,2040	-1,0335	1,5578
	37.	-0,1598	-3,0267	-1,3630	-2,8062	-3,8563	-1,0550	1,4904
	38.	0,1309	-1,5869	-1,3395	-4,6373	-4,4145	-1,8734	2,1327
	39.	-0,3293	-3,4576	0,0525	-1,7845	-2,6653	-1,9193	1,2751
	40.	-0,5151	-2,3434	0,4514	-0,2662	-1,4615	-0,8065	1,0717
	41.	0,1484	-1,6023	-0,2571	-2,3488	-1,9508	-1,8163	2,1388

Графички приказ парова (варијанти) улазних величина  $x_1$  и  $x_2$  (ознака „а“ за добра и „б“ за лоша предузећа) и израчунатих вриједности ЛД функције (линеарних класификатора) за поједине парове (варијанте) су дате на слици 3.

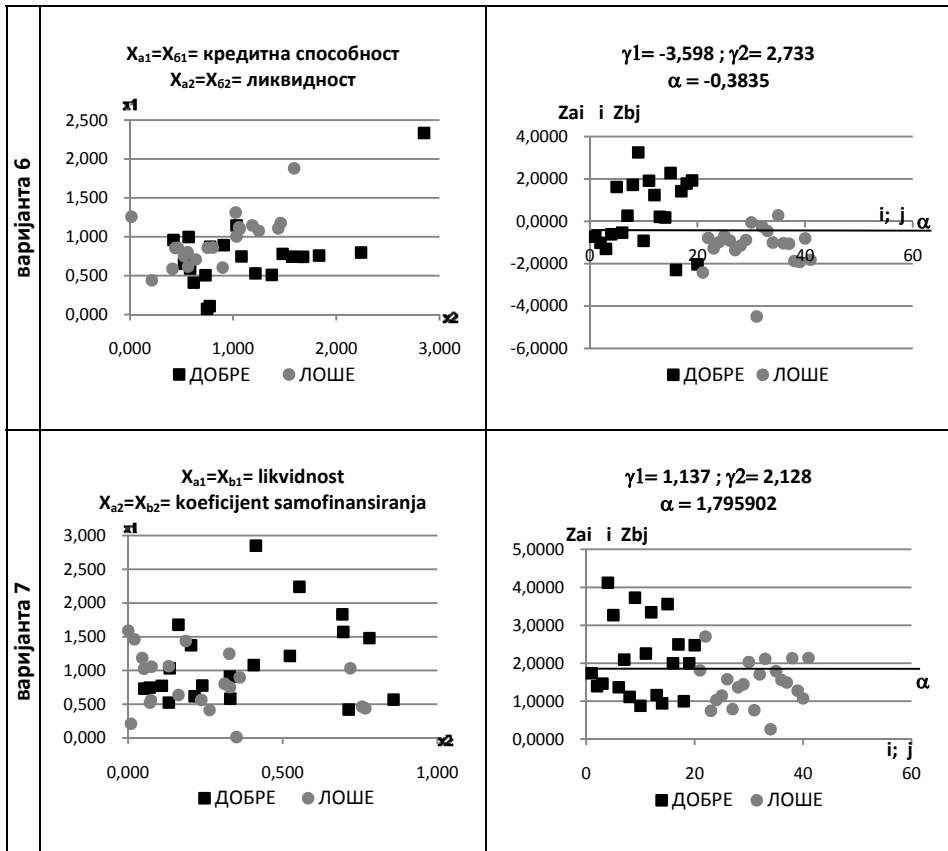
На основу приказаних резултата, могуће је примијетити да одређени парови имају већу дискриминаторну моћ од других, односно да се у неким случајевима подјела на „добра“ и „лоша“ предузећа се јасније уочава, док у другим за дате финансијске индикаторе није се могла уочити јасна подјела.

Слика 3: Графички приказ седам варијанти улазних величина и израчунатих вриједности ЛД функције









Како би се прецизно одредило које комбинације индикатора имају највећу дискриминирајућу моћ, потребно је за добијене резултат одредити фреквенције<sup>22</sup> исправно добијеног резултата<sup>23</sup> у складу са правилом:

$$D_{a,i} = \begin{cases} +1 & ; Z_{a,i} \geq \alpha \\ -1 & ; Z_{a,i} < \alpha \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \dots N_a$$

$$D_{\delta,j} = \begin{cases} +1 & ; Z_{\delta,j} \geq \alpha \\ -1 & ; Z_{\delta,j} < \alpha \end{cases} \quad j = 1, 2, 3, \dots N_{\delta}$$

(28)

<sup>22</sup> Фреквенција на великом броју примјера представља вјероватноћу.

<sup>23</sup> D – Decision (одлука).

За исправну (добру) одлуку „ДОБРА“ предузећа требала би да имају  $D_{a,i} = +1$ , а „ЛОША“  $D_{b,j} = -1$ . Постотак добре одлуке се добије на бази једначине:

$$\text{Постотак добре одлуке} = \frac{\text{Број добрих резултата}}{\text{укупан број тестирања} \times 100 (\%)}$$

У складу са овом једначином можемо измјерити фреквенцију дискриминаторне функције, односно можемо у процентуално изразити тачност модела<sup>24</sup> за одређени пар финансијских индикатора за „добра“ и „лоша“ предузећа и то:

Табела 5:

Варијанта	1	2	3	4	5	6	7
	56.1 %	65.9 %	80.5 %	85.9 %	70.7 %	80.5 %	63.4 %

Из наведеног се може закључити да парови индикатора 3, 4 и 6 (ROA i ROE; укупан приход у 000KM и кредитна способност; те кредитна способност и ликвидност<sup>25</sup>) имају тачност изнад 80%, што статистички представља значајну вјероватноћу, те се као такви могу употребити за класификацију будућих клијената на „добра“ и „лоша“ предузећа, односно на компаније које треба узети у разматрање за одобравање кредита и компаније које не задовољавају иницијалне историјске лимите и као такве не представљају потенцијалне клијенте.

## 7. Могуће грешке и одступања приликом рачунања

Приликом сваког моделирања, постоје два типа могућих грешака. У нашем случају први могући тип грешке је да лошег клијента (предузеће) прогласимо и ставимо у категорију доброг клијента

<sup>24</sup> Прорачун фреквенција дискриминаторне функције је урађени у програму MS Excell и рад је аутора.

<sup>25</sup> Значајно је нагласити на у варијацији парова највећу вјероватноћу подјеле на „добра“ и „лоша“ предузећа имају они парови који код рачунања финансијских индикатора узимају укупан приход клијента.

(грешка типа 1), а други да се добар клијент класификује у категорију лош клијент (грешка типа 2).

Грешка типа 1 ће се одразити на банку као трошак, односно дефинисање клијената групе из групе *Б* (из посматраног примјера „лоших“ предузећа) у групу *А*, односно у „добра“ предузећа. Ово ће имати за посљедицу губитак камате, дијела или читаве главнице, те имати негативан утицај на профитабилност и капитал кроз захтјеве за додатне резерве за потенцијалне губитке које је банка дужна да издвоји за клијенте који не извршавају плаћање обавеза на вријеме.

Грешка типа 2 генерално је мањи трошак за банку него грешка типа 1. и има за посљедицу губитак камате и провизије које би банка зарадила сервисирајући уредног комитента.

Да би се умањила могућност грешке типа 1, можемо једноставно промијенити граничну вриједност, тј. повећати у позитивном смјеру вриједност „прага“  $\alpha$  (једначина 28.) тако да правило *D* буде рестриктивно.

## Закључак

Кредитни ризик, успркос константним иновацијама у подручју финансијских услуга, представља највећи узрок банкрота банака у свијету. Кроз процес активног управљање кредитним ризиком банка може да обезбиједи конзистентне, разумљиве и оперативне мјере, које омогућавају избор изложености у које треба инвестирати, додатно их повећати или редуковати, дефинишући прецизне износе и временске периоде. Један од научно доказаних ефикасних метода за управљање кредитним ризиком је кредитно рангирање, односно утврђивање ранга клијента на основу његовог бонитета. Кориштени модел у овом раду је базиран на Фишеровој линеарној дискриминаторној анализи (ФЛДА), првенствено због своје робустности и једноставности примјене. Као рејтинг алат предложена ФЛДА може омогућити брзо рангирање клијента, тако да за одабране парове можемо са 80% сигурности направити разлику између „добрих“ и „лоших“ предузећа.

Добијени резултати упућују на закључак да би требало користити модел сачињен од парова: ROA i ROE; укупан приход у 000 КМ и кредитна способност; и кредитна способност и ликвидност. Модел би функционисао тако да се за све нове тражиоце кредита (предузећа) израчунају наведени индикатори, њихове кореспондирајуће Z вриједности у складу са формулом (13) и граничне вриједности у складу са формулом (26) или (27), и те нове вриједности уврсте у постојеће „историјске“ вриједности (примјер датог прорачуна), те на основу њиховог положаја у односу на граничну вриједност одредити, да ли клијент задовољава минимум потреба за одобрење кредита (ако је изнад граничне вриједности), односно не задовољава критерије (ако је испод граничне линије).

Такође, предвиђени модел се може користити и за активни мониторинг клијената и функционисао би на истом принципу, с тим да се у овом случају не би разматрала питања прихватања кредитног захтјева, односно одбијања, већ би се дефинисале потребне мјере: ако је клијент рангиран испод граничне вриједности, банка би захтијевала додатне инструменте обезбјеђења. Модел се може користити и за дефинисање поља сигурности/безбједности, односно не-сигурности одређивањем положаја за сваког клијента, односно за креирање мапе ризичних позиција у читавом кредитном портфолију банке.

Генерално, аутор рада сматра да резултати представљене ФЛДА анализе не могу бити одлучујући фактор код пласирања средстава, већ само полазна основа за доношење одлуке о одобрењу пласмана, односно код селекције нових клијената банке: ако је клијент испод граничне вриједности, банка и не улази у процес разматрања његовог захтјева. Тиме би се доста допринијело оперативности процеса одлучивања, јер би се у случајевима када је клијент изнад граничне вриједности наставио процес одлучивања и одлука би била заснована на експертском тумачењу.

Овој рад се заснива на релативно малом узорку, те даља истраживања на овом подручју би требала бити усмјерена на развој модела у којима се користи већи броја индикатора и то у комбинаци-

јама парова (4-5 индикатора), тражећи „идеалан пар“, као и другим рејтинг моделима (логит и пробит модели) и генерално већем посматраном узорку. Такође, у наредним истраживањима већа пажња ће се посветити дефинисању вјероватноће неплаћања (PD) унутар периода од годину дана на основу израчунатог ранга клијента, што је предуслов за развијање интерних напредних модела за процјену адекватности капитала по принципима „Басел 2“ и тренутно разматраном „Басел 3. споразуму“.

### **Литература:**

1. Греунинг, Н.; Брајовић-Братановић, С. *Анализа и управљање банкарским ризицима: приступ за процјену организације управљања ризицима и изложености финансијском ризику*. 2. изд. Загреб: Мате, 2006.
2. Sironi, A.; Resti, A. *Risk management and shareholders' value in banking : from risk measurement models to capital allocation policies*. 1<sup>st</sup> edition. West Sussex: John Wiley & Sons Ltd, 2007.
3. Bluhm, C.; Overbeck, L.; Wagner, C. *Intruductionto credit risk modeling*. 1<sup>st</sup> edition. Boca Raton: Chapman & Hall CRC financial mathematics series, 2003.
4. Thomas, L.; Edelman, D.; Crokk, J. *Credit scoring and application*. 1<sup>st</sup> edition. Philadelphia: Siam monographs on mathematical modeling, 2002.
5. Colquitt, J. *Credit risk management*. 3th edition. New York: McGraw-Hill, 2007.
6. Fisher, R. The Use of Multiple Measurements in Taxonomic Problems// *Cambridge Annals of Eugenics*, 1936, pp. 179-188.
7. Beaver, W. Financial ratios predictors of failure// *Journal of Accounting Research*, 1966, pp. 71-111.
8. Altman, E. Financial Ratios, Discriminant Analysis and the Prediction of Corporate Bankruptcy// *Berkeley Journal of Finance*, 1968, pp. 189-209.